Proceedings of IAM, V.3, N.2, 2014, pp.173-184

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ МОДЕЛИ РОССЕРА ДЛЯ ГАЗЛИФТНОГО ПРОЦЕССА ПРИ ДОБЫЧЕ НЕФТИ*

Н.А. Алиев[1], Фикрет А. Алиев[1], М.М. Муталлимов[1], Р.М. Тагиев[2]

[1]Бакинский Государственный Университет, Баку, Азербайджан
[2]Институт Математики и Механики НАНА, Баку, Азербаджан
e-mail: f_aliev@yahoo.com

Резюме. Рассматриваются граничные задачи для двухмерной системы гиперболических уравнений первого порядка, которая описывает движение газа и газожидкостной смеси (ГЖС) в кольцевом пространстве и подъемнике, соответственно, в газлифтном процессе при добыче нефти. Предполагается, что из конца кольцевого пространства к началу подъемника движение выполняется с помощью соответствующих импульсных систем, описывающих образование ГЖС. Поскольку общее движение описывается то системой дифференциальных, то разностных уравнений, целесообразно описывать ее системой разностных уравнений. Поэтому, используя равномерные сетки, строится модель Россера, где показывается, что возмущение, входящее в дискретную систему, определяется из соответствующих линейных систем алгебраических уравнений. Показывается, что в случае постоянных граничных данных, возмущения, входящие в модель Россера, отсутствуют, т.е. они являются нулевыми. Для данного случая получены аналитические представления решения, где при стремлении к нулю шагов дискретизации полученные результаты совпадают с аналогичными результатами имеющихся в непрерывном случае.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, равномерная сетка, газлифт, разностные уравнения, модель Россера, системы алгебраических уравнений.

AMS Subject Classification: 49J15, 49J35.

1. Введение

Как известно [10,18,20,], газлифтный способ является одним из основных этапов при добыче нефти, для которого разработаны разные математические модели [2,10], описывающие движение в газлифтном процессе. Далее, с их помощью ставятся разные задачи, например добывать максимальный объем нефти с минимальной подачей газа [3,9], определение коэффициента гидравлического сопротивления и параметров образования ГЖС [1,2,12] и др.. Однако все эти задачи были решены для сосредоточенных дифференциальных уравнений, полученных из распределенных систем

---

* Эта работа поддержана совместным грантом НАНА и ГНКАР 17, 2013-2015 г.
* Работа была представлена на семинаре Института Прикладной Математики 21.10.2014

дифференциальных уравнений гиперболического типа, описывающих пространственное движение газлифтного процесса с помощью разных модификаций методов осреднения [10,11,13]. Исходя из последнего можно констатировать, что, в основном, эти исследования носят приближенный характер и более актуальными являются исследования самого исходного случая, где в [14,15] приведены их решения с помощью специальных бесконечных рядов, обеспечивающие приближенные решения с любой точностью. Однако, реализация таких методов на компьютере сталкивается с определенными трудностями [11]. Поэтому возникают вопросы, нельзя ли использовать разные разностные схемы, упростить процессы вычисления даже с определенной погрешностью? Исходя из этого в данной работе делаются попытки использования разностных схем, заменяющих исходную непрерывную систему разностной моделью Россера [4]. Показывается, что с помощью разностных схем для определения параметров возмущений нужно решать соответствующие системы линейных алгебраических уравнений. На конкретном примере, когда граничные данные являются постоянными, получены аналитические выражения для решений систем разностных уравнений Россера, которые при стремлении к нулю шагов дискретизации совпадают с точным решением, имеющимся в непрерывном случае [8], что показывает адекватность модели Россера. Рассматривается система линейных неоднородных разностных уравнений с переменными коэффициентами типа Россера [17]. В работе рассмотрена задача оптимального управления дискретными двухпараметрическими системами типа Россер [16].

2. Преобразование системы гиперболических уравнений

Рассмотрим следующую систему гиперболических уравнений, описывающую движение в газлифтном процессе [10].

$$\begin{cases} -F\dfrac{\partial P(x,t)}{\partial x} = \dfrac{\partial Q(x,t)}{\partial t} + 2aQ(x,t), \\ -F\dfrac{\partial P(x,t)}{\partial t} = c\dfrac{\partial Q(x,t)}{\partial x}, \qquad x \in (0,l), t \in (-\infty;+\infty), \end{cases} \tag{1}$$

с граничными условиями

$$\begin{cases} P(0,t) = P_0(t), \\ Q(0,t) = Q_0(t), \qquad t \in (-\infty;+\infty). \end{cases} \tag{2}$$

где *F, a, c, l,* и *T* положительные постоянные числа, а $P_0(t)$ и $Q_0(t)$ заданные вещественные значения гладких функции, $P(x,\mathrm{t})$ и $Q(x,t)$ неизвестные, подлежащие определению.

Отметим, что условия в точке $(x,0)$ можно определит из [8] в следующем виде

$$\begin{cases} P(x,0)=\sum_{\mathrm{i}=0}^{\infty}\mathrm{P}_{\mathrm{k}}(t)\Big|_{t=0}\dfrac{x^k}{k!} \\ Q(x,0)=\sum_{\mathrm{i}=0}^{\infty}\mathrm{Q}_{\mathrm{k}}(t)\Big|_{t=0}\dfrac{x^k}{k!} \end{cases} \tag{3}$$

где $P_k(t)$, $Q_k(t)$ определяются в виде

$$\begin{cases} P_{2k}(t)=\left(\dfrac{d}{dt}+2a\right)^k\dfrac{P_0^{(k)}(t)}{c^k} \\ Q_{2k}(t)=\left(\dfrac{d}{dt}+2a\right)^k\dfrac{Q_0^{(k)}(t)}{c^k} \end{cases} \qquad k\ge 0$$

$$\begin{cases} P_{2k+1}(t)=-\left(-\dfrac{d}{dt}+2a\right)^{k+14}\dfrac{Q_0^{(k)}(t)}{Fc^k} \\ Q_{2k+1}(t)=-\left(\dfrac{d}{dt}+2a\right)^k\dfrac{FP_0^{(k+1)}(t)}{c^{k+1}} \end{cases} \qquad k\ge 0$$

Теперь произведем следующую замену,

$$P(x,t)=R(x,t)+Q(x,t), \tag{4}$$

отметив, что при помощи решения задач (1)-(2) начальные значения неизвестных $P(x,\mathrm{t})$ и $Q(x,t)$ определяются из представления [8] (см. формулу (4)), где она представлена в виде ряда неизвестных коэффициентов, которые определяются не из системы дифференциальных, а из алгебраических уравнений. Здесь $R(x,t)$ новая неизвестная функция, заменяющая $P(x,t)$. Поскольку в каждое уравнение системы (1) входит производная различных функции $P(x,\mathrm{t})$ и $Q(x,t)$ по различным переменным x и t, то применение различных способов дискретизации для получения компактных моделей, например модели Россера [4,7] не увенчиваются успехом. Поэтому, имеет смысл использование преобразования (4), применив которое к системе (1), можно получить соответствующие модели Россера [7].

Таким образом, после применения преобразования (3) к системе уравнений (1) имеем

$$\begin{cases} -F\dfrac{\partial R}{\partial x} - F\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial t} + 2aQ, \\ -F\dfrac{\partial R}{\partial t} - F\dfrac{\partial Q}{\partial t} = c\dfrac{\partial Q}{\partial x}. \end{cases}$$

или же

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R}{\partial x} = -\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{1}{F}\left(-\dfrac{c}{F}\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial R}{\partial t}\right) - \dfrac{2a}{F}Q, \\ \dfrac{\partial Q}{\partial t} = -\dfrac{\partial R}{\partial t} - \dfrac{c}{F}\dfrac{\partial Q}{\partial x}. \end{cases} \tag{5}$$

Принимая обозначения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} &= W(x,t), \\ \frac{\partial R(x,t)}{\partial t} &= \chi(x,t). \end{aligned} \tag{6}$$

из системы уравнений (5) имеем:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R(x,t)}{\partial x} = \left(\dfrac{c}{F^2} - 1\right)W(x,t) + \dfrac{1}{F}\chi(x,t) - \dfrac{2a}{F}Q(x,t), \\ \dfrac{\partial Q(x,t)}{\partial t} = -\chi(x,t) - \dfrac{c}{F}W(x,t). \end{cases} \tag{7}$$

Тогда, граничные условия (2) с новыми обозначениями переходят к виду

$$\begin{aligned} R(0,t) &= P_0(t) - Q_0(t), \\ Q(0,t) &= Q_0(t). \end{aligned} \tag{8}$$

Отметим, что после преобразования (4), (6), полученная система уравнений (7) уже позволяет после применения схемы какой-либо дискретизации построит модели Россера, но открытым остается определение введенных новых функций $W(x,t)$ и $\chi(x,t)$ [19].

3. Схема дискретизации

Рассмотрим следующую равномерную сетку [19]

$$x_i = ih, i = \overline{0,N},\ hN = l$$

$$t_n = n\tau, n = \overline{0,k},\ \tau k = T.$$

Тогда, принимая обозначения

$$R(x_i,t_n) = R_i^n, Q(x_i,t_n) = Q_i^n\ , \tag{9}$$

задачу (6)-(8) дискретизируем следующим образом [19]:

$$\begin{cases} \dfrac{R_{i+1}^n - R_i^n}{h} = \left(\dfrac{c}{F^2} - 1\right) W_i^n + \dfrac{1}{F}\chi_i^n - \dfrac{2a}{F} Q_i^n, \\ \dfrac{Q_i^{n+1} - Q_i^n}{\tau} = -\chi_i^n - \dfrac{c}{F} W_i^n. \qquad i \ge 0,\ n \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{Q_{i+1}^n - Q_i^n}{h} = W_i^n, \\ \dfrac{R_i^{n+1} - R_i^n}{\tau} = \chi_i^n. \qquad i \ge 0,\ n \ge 0 \end{cases}$$

$$R_0^n = P_0^n - Q_0^n. \qquad n \ge 0, \tag{10}$$

которая уже приводит к явной схеме:

$$\begin{cases} R_{i+1}^n = R_i^n + h\left(\dfrac{c}{F^2} - 1\right) W_i^n + \dfrac{h}{F}\chi_i^n - \dfrac{2ah}{F} Q_i^n, \\ Q_{i+1}^n = Q_i^n + hW_i^n, \\ R_i^{n+1} = R_i^n + \tau\chi_i^n, \\ Q_i^{n+1} = Q_i^n - \tau\chi_i^n - \dfrac{c\tau}{F} W_i^n. \end{cases} \tag{11}$$

Легко видеть, что решение системы (11) представляется в следующем виде:

$$\begin{cases} R_i^n = R_0^n + h\left(\dfrac{c}{F^2} - 1\right)\displaystyle\sum_{k=0}^{i-1} W_k^n + \dfrac{h}{F}\sum_{k=0}^{i-1}\chi_k^n - \dfrac{2ah}{F}\sum_{k=0}^{i-1} Q_k^n, \\ Q_i^n = Q_0^n + h\displaystyle\sum_{k=0}^{i-1} W_k^n, \\ R_i^n = R_i^0 + \tau\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\chi_i^k, \\ Q_i^n = Q_i^0 - \tau\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\chi_i^k - \dfrac{c\tau}{F}\sum_{k=0}^{n-1} W_i^k. \qquad i \ge 0,\ n \ge 0 \end{cases}$$

или же

$$\begin{cases} R_i^n = R_0^n + h(\frac{c}{F^2} - 1)\sum\limits_{k=0}^{i-1} W_k^n + \frac{h}{F}\sum\limits_{k=0}^{i-1}\chi_k^n - \frac{2ahi}{F}Q_0^n - \frac{2ah^2}{F}\sum\limits_{k=0}^{i-1}\sum\limits_{s=0}^{k-1} W_s^n, \\ Q_i^n = Q_0^n + h\sum\limits_{k=0}^{i-1} W_k^n, \\ R_i^n = R_i^0 + \tau\sum\limits_{k=0}^{n-1}\chi_i^k, \\ Q_i^n = Q_i^0 - \tau\sum\limits_{k=0}^{n-1}\chi_i^k - \frac{c\tau}{F}\sum\limits_{k=0}^{n-1} W_i^k, \end{cases} \quad (12)$$

где в правых частях (12) все параметры, кроме $R_i^0, Q_i^0, \chi_i^n, W_i^n$ известны.

4. Построение 2Д-модели Россера

Наконец, после приравнивания первого уравнения с третьим, а второго с четвертым из системы (12) для определения W_i^n и X_i^n приходим к следующей системе алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} R_0^n + h(\frac{c}{F^2} - 1)\sum\limits_{k=0}^{i-1} W_k^n + \frac{h}{F}\sum\limits_{k=0}^{i-1}\chi_k^n - \frac{2ahi}{F}Q_0^n - \\ -\frac{2ah^2}{F}\sum\limits_{k=0}^{i-1}\sum\limits_{s=0}^{k-1} W_s^n = R_i^0 + \tau\sum\limits_{k=0}^{n-1}\chi_i^k, \\ Q_0^n + h\sum\limits_{k=0}^{i-1} W_k^n = Q_i^0 - \tau\sum\limits_{k=0}^{n-1}\chi_i^k - \frac{c\tau}{F}\sum\limits_{k=0}^{n-1} W_i^k, n \ge 0, i \ge 0. \end{cases} \quad (13)$$

В системе (13) при $n = 0$ получаем:

$$\begin{cases} R_i^0 = R_0^0 + h(\frac{c}{F^2} - 1)\sum\limits_{k=0}^{i-1} W_k^0 + \frac{h}{F}\sum\limits_{k=0}^{i-1}\chi_k^0 - \frac{2ahi}{F}Q_0^0 - \frac{2ah^2}{F}\sum\limits_{k=0}^{i-1}\sum\limits_{s=0}^{k-1} W_s^0, \\ Q_i^0 = Q_0^0 + h\sum\limits_{k=0}^{i-1} W_k^0, i \ge 0. \end{cases} \quad (14)$$

Тогда, учитывая (14) в системе (13) имеем.

$$\begin{cases} R_0^n - \dfrac{2ahi}{F}Q_0^n + h(\dfrac{c}{F^2}-1)\sum\limits_{k=0}^{i-1}W_k^n + \dfrac{h}{F}\sum\limits_{k=0}^{i-1}\chi_k^n - \\ -\dfrac{2ah^2}{F}\sum\limits_{k=0}^{i-1}\sum\limits_{s=0}^{k-1}W_s^n = R_0^0 - \dfrac{2ahi}{F}Q_0^0 + h(\dfrac{c}{F^2}-1)\sum\limits_{k=0}^{i-1}W_k^0 + \\ +\dfrac{h}{F}\sum\limits_{k=0}^{i-1}\chi_k^0 - \dfrac{2ah^2}{F}\sum\limits_{k=0}^{i-1}\sum\limits_{s=0}^{k-1}W_s^0 + \tau\sum\limits_{k=0}^{n-1}\chi_i^k \\ Q_0^n + h\sum\limits_{k=0}^{i-1}W_k^n = Q_0^0 + h\sum\limits_{k=0}^{i-1}W_k^0 - \tau\sum\limits_{k=0}^{n-1}\chi_i^k - \dfrac{c\tau}{F}\sum\limits_{k=0}^{n-1}W_i^k \qquad n \ge 1,\, i \ge 0 \end{cases} \tag{15}$$

Таким образом, система (15) представима в следующем виде:

$$\begin{cases} \tau\sum\limits_{k=0}^{n-1}\chi_i^k = R_0^n - R_0^0 - \dfrac{2ahi}{F}\left(Q_0^n - Q_0^0\right) + h\left(\dfrac{c}{F^2}-1\right)\sum\limits_{k=0}^{i-1}\left(W_k^n - W_k^0\right) + \\ +\dfrac{h}{F}\sum\limits_{k=0}^{i-1}\left(\chi_k^n - \chi_k^0\right) - \dfrac{2ah^2}{F}\sum\limits_{k=0}^{i-1}\sum\limits_{s=0}^{k-1}\left(W_s^n - W_s^0\right), \\ \dfrac{c\tau}{F}\sum\limits_{k=0}^{n-1}W_i^k = \left(Q_0^0 - Q_0^n\right) + h\sum\limits_{k=0}^{i-1}\left(W_k^0 - W_k^n\right) - \left(R_0^n - R_0^0\right) + \dfrac{2ahi}{F}\left(Q_0^n - Q_0^0\right) - \\ -h\left(\dfrac{c}{F^2}-1\right)\sum\limits_{k=0}^{i-1}\left(W_k^n - W_k^0\right) - \\ -\dfrac{h}{F}\sum\limits_{k=0}^{i-1}\left(\chi_k^n - \chi_k^0\right) + \dfrac{2ah^2}{F}\sum\limits_{k=0}^{i-1}\sum\limits_{s=0}^{k-1}\left(W_s^n - W_s^0\right) \qquad n \ge 1,\, i \ge 0 \end{cases} \tag{16}$$

Если $i = 0$, из соотношения (16) получим:

$$\begin{cases} \tau\sum\limits_{k=0}^{n-1}\chi_0^k = R_0^n - R_0^0 \\ \dfrac{c\tau}{F}\sum\limits_{k=0}^{n-1}W_0^k = Q_0^0 - Q_0^n - \left(R_0^n - R_0^0\right) \qquad n \ge 1, \end{cases} \tag{17}$$

из которого определятся все χ_0^k и W_0^k при $k \ge 0$, т.е.

$$\begin{cases} \chi_0^{n-1} = \dfrac{1}{\tau}\left(R_0^n - R_0^0\right) - \sum\limits_{k=0}^{n-2}\chi_0^k \\ W_0^{n-1} = \dfrac{F}{c\tau}\left[\left(Q_0^0 - Q_0^n\right) - \left(R_0^n - R_0^0\right)\right] - \sum\limits_{k=0}^{n-2}W_0^k \qquad n \ge 1. \end{cases} \tag{18}$$

Теперь в (16) при $i = 1$ имеем:

$$\begin{cases}\tau\sum_{k=0}^{n-1}\chi_1^k=R_0^n-R_0^0-\dfrac{2ah}{F}\left(Q_0^n-Q_0^0\right)+h\left(\dfrac{c}{F^2}-1\right)\left(W_0^n-W_0^0\right)+\dfrac{h}{F}\left(\chi_0^n-\chi_0^0\right),\\ \dfrac{c\tau}{F}\sum_{k=0}^{n-1}W_1^k=\left(Q_0^0-Q_0^n\right)+h\left(W_0^0-W_0^n\right)-\left(R_0^n-R_0^0\right)+\dfrac{2ah}{F}\left(Q_0^n-Q_0^0\right)-\\ -h\left(\dfrac{c}{F^2}-1\right)\left(W_0^n-W_0^0\right)-\dfrac{h}{F}\left(\chi_0^n-\chi_0^0\right) \qquad n\geq 1,\end{cases}$$

из которого определятся все χ_1^k и W_1^k при $k\geq 0,$ т.е.

$$\begin{cases}\chi_1^{n-1}=\dfrac{1}{\tau}\left(R_0^n-R_0^0\right)-\dfrac{2ah}{F\tau}\left(Q_0^n-Q_0^0\right)+\\ +\dfrac{h}{\tau}\left(\dfrac{c}{F^2}-1\right)\left(W_0^n-W_0^0\right)+\dfrac{h}{F\tau}\left(\chi_0^n-\chi_0^0\right)-\sum_{k=0}^{n-2}\chi_1^k \qquad n\geq 1\\ W_1^{n-1}=\dfrac{F}{c\tau}\left(Q_0^0-Q_0^n\right)+\dfrac{Fh}{c\tau}\left(W_0^0-W_0^n\right)-\dfrac{F}{c\tau}\left(R_0^n-R_0^0\right)+\\ +\dfrac{2ah}{c\tau}\left(Q_0^n-Q_0^0\right)-\dfrac{Fh}{c\tau}\left(\dfrac{c}{F^2}-1\right)\left(W_0^n-W_0^0\right)-\dfrac{h}{c\tau}\left(\chi_0^n-\chi_0^0\right)-\sum_{k=0}^{n-2}W_1^k\end{cases} \tag{19}$$

Таким образом, из (16) определяются все χ_i^k и W_i^k. Подставляя их в (14) для определения R_i^0 и Q_i^0 имеем следующие линейные соотношения

$$\chi_i^{n-1}=\frac{1}{\tau}\left(R_0^n-R_0^0\right)-\frac{2ahi}{F\tau}\left(Q_0^n-Q_0^0\right)+$$
$$+\frac{h}{\tau}\left(\frac{c}{F^2}-1\right)\sum_{k=0}^{i-1}\left(W_k^n-W_k^0\right)+\frac{h}{F\tau}\sum_{k=0}^{i-1}\left(\chi_k^n-\chi_k^0\right)-\frac{2ah^2}{F\tau}\sum_{k=0}^{i-1}\sum_{s=0}^{k-1}\left(W_s^n-W_s^0\right)-\sum_{k=0}^{n-2}\chi_i^k$$
$$W_i^{n-1}=\frac{F}{c\tau}\left(Q_0^0-Q_0^n\right)-\frac{hF}{c\tau}\sum_{k=0}^{i-1}\left(W_k^0-W_k^n\right)-\frac{F}{c\tau}\left(R_0^n-R_0^0\right)+\frac{2ahi}{c\tau}\left(Q_0^n-Q_0^0\right)-\frac{Fh}{c\tau}\left(\frac{c}{F^2}-1\right)$$
$$\frac{Fh}{c\tau}\left(\frac{c}{F^2}-1\right)\sum_{k=0}^{i-1}\left(W_k^n-W_k^0\right)-\frac{h}{c\tau}\sum_{k=0}^{i-1}\left(\chi_k^n-\chi_k^0\right)+\frac{2ah^2}{c\tau}\sum_{k=0}^{i-1}\sum_{s=0}^{k-1}\left(W_s^n-W_s^0\right)-\sum_{k=0}^{n-2}W_i^k.$$

Поскольку первое и четвертое уравнения (11) полностью описывают все точки области $(t,x),$ можно приближенно заменить (1) следующим разностным уравнением

$$\begin{bmatrix}R_{i+1}^n\\ Q_i^{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -\dfrac{2ah}{F}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}R_i^n\\ Q_i^n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}h\left(\dfrac{c}{F^2}-1\right) & \dfrac{h}{F}\\ -\tau & -\tau\end{bmatrix}\begin{bmatrix}W_i^n\\ \chi_i^n\end{bmatrix} \tag{20}$$

Теперь используя обозначения из (10) для Q_i^{n+1}, Q_i^n имеем

$$Q_i^{n+1}=-R_i^{n+1}+P_i^{n+1}\ ,\ Q_i^n=-R_i^n+P_i^n$$

Тогда уравнение (20) переходит к виду

$$\begin{bmatrix} R_{i+1}^{n} \\ P_i^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(1+\frac{2ah}{F}\right) & -\frac{2ah}{F} \\ \frac{2ah}{F} & -\frac{2ah}{F}+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_i^n \\ P_i^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h\left(\frac{c}{F^2}-1\right) & \frac{h}{F} \\ h\left(\frac{c}{F^2}-1\right)-\tau & \frac{h}{\tau}-\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_i^n \\ \chi_i^n \end{bmatrix}$$

являющееся моделью Россера [7].

Пример. Проиллюстрируем выше предложенный алгоритм в случае, когда в (2) величины $P_0(t)$ и $Q_0(t)$ постоянные, т.е.

$$P(0,t) = P_0^n = P_0, \qquad Q(0,t) = Q_0^n = Q_0 \tag{21}$$

Тогда из (11) с учетом (20) W_i^n и χ_i^n при $n \ge 1,\ i \ge 0$ обращаются в нуль, т.е

$$W_i^n = 0,\ \chi_i^n = 0$$

Что касается неизвестных R_i^0 и Q_i^0, то они определяются из (13) в виде

$$\begin{cases} R_i^0 = R_0^0 + h\left(\frac{c}{F^2}-1\right)\sum_{k=0}^{i-1} W_k^0 + \frac{h}{F}\sum_{k=0}^{i-1}\chi_k^0 - \frac{2ahi}{F}Q_0^0 - \frac{2ah^2}{F}\sum_{k=0}^{i-1}\sum_{s=0}^{k-1} W_s^0, \\ Q_i^0 = Q_0^0 + h\sum_{k=0}^{i-1} W_k^0, i \ge 0. \end{cases}$$

Отметим, что после учета (21) в (20), имеем, что из второго уравнения (20)

$$Q_i^n = Q_0\,. \tag{22}$$

А из первого уравнения (20) имеем

$$R_{i+1}^n = R_i^n - \frac{2ah}{F} i Q_0$$

т.е

$$R_{i+1}^n = R_0^n - \frac{2ah}{F} i Q_0$$

Поскольку из (10) R_0^n известно, то

$$P_{i+1}^n = P_0^n - \frac{2ah}{F} Q_0 i \tag{23}$$

а это при стремлении к нулю шага h обеспечивает совпадение ih с текущей координатой x.

Таким образом, соотношение (22) переходит к виду

$$P(x,t) = P_0 - \frac{2ah}{F} Q_0 x\,,$$

который совпадает с результатами, полученными в [8].

Отметим, что соотношения (22), (23) определяют движение в кольцевом пространстве. А в подъемнике, используя разностные уравнения, которые определяют переход от конца кольцевого пространства к началу подъемника, можно определить P_i^n, Q_i^n аналогично.

5. Заключение

В настоящей работе приведены модели Россера, являющиеся дискретным аналогом системы гиперболических уравнений, описывающих движение в газлифтном процессе при добыче нефти. Показаны, что при переходе к дискретному случаю возникают возмущения, которые определяются из соответствующих систем линейных алгебраических уравнений. Отметим, что такая модель может быть успешно использована при определении КГС в подъемнике, коэффициента образования ГЖС в стыке конца кольцевого пространства и начала подъемника, определении оптимального режима и др.

Литература

1. Aliev F. A., Ismailov N.A., Namazov A.A. Asymptotic method for finding the coefficient of hydraulic resistance in lifting of fluid on tubing ISSN 1562-3076. Нелинейны коливання.
2. Aliev, F.A., Ismailov, N.A. Inverse problem to determine the hydraulic resistance coefficient in the gas lift process. Appl.Comput. Math., V.12, N3, 2013, pp.306-313
3. Aliev, F.A., Ismailov, N.A., Temirbekova, N.L. Extermal solution of the problem of the choice of optimum modes for gaz-lift process, Appl.Comput. Math., V.11, N3, pp.348-357.
4. Bily B. Linear Quadratic problem for Roesser model of 2-D systems. Foundations of control engineering. Vol.13. №3. (1988). 103-111.
5. Camponogara V.I., A. Plucenio, Teixeira A.F., Campos S.R.V.. An automation system for gas-lifted oil wells: Model identification control and optimization. Journal of Petroleum Science and Engineering 70. (2010). 157-167
6. Eikrem G.O., Aamo O.N., Foss B.A., Stabilization of gas-distribution instability in single-point dual gas lift wells, SPE Production and Operations, Vol.21, No.2, 2006, pp.1-20.
7. Roesser R., A discrete state space model for linear image processing. IEEE Trans. Autom. Contr., vol.AC-20, no.1, 1975
8. Алиев Н.А., Алиев Ф.А., Гулиев А. П., Ильясов М.Х.. Метод рядов в решении одной краевой задачи для системы уравнений гиперболического типа, возникающих при добыче нефти. PROCEEDINGS of the Institute of Applied Mathematics, Vol.2, No.2, 2013, с.113-136.

9. Алиев Ф.А. Минимаксное решение задачи выбора оптимальных режимов газлифта. Доклады НАН Азерб. 201. №1. С.27-36
10. Алиев Ф.А., Ильясов М.Х., Джамалбеков М.А.. Моделирование работы газлифтной скважины, Доклады НАН Азербайджана, №2, 2008, с.107-115.
11. Алиев Ф.А., Ильясов М.Х., Нуриев Н.Б.. Задачи моделирования оптимальной стабилизации газлифтного процесса, Прикладная механика, т. 46, №6, 2010, с.113-122.
12. Алиев Ф.А., Исмаилов Н.А., Алгоритм вычисления коэффициента гидравлического сопротивления в газлифтном процессе. Доклады НАН Азерб. 2014. №1. С.19-22
13. Алиев Ф.А., Исмаилов Н.А., Задачи оптимизации с периодическим краевым условием и граничным управлением в газлифтных скважинах, Нелинейные колебания,т.17, №2, 2014, с.151-159
14. Гулиев А. П., Ильясов М.Х., Алиев Н.А., Алиев Ф.А., Алгоритм решения задачи определения движения пространственного газлифтного процесса., Proceedings of the Institute of Applied Mathematics, Vol.2, No.1, 2013, с.91-97.
15. Гулиев А. П., Тагиев Р.М, Касымова К.Г.. Вычислительный алгоритм для решения краевой задачи гиперболической системы возникающих в задачах газлифтного процесса. Proceedings of the Institute of Applied Mathematics, Vol.3, No.1, 2014, с.105-111.
16. Кадырова С.Ш., Мансимов К.Б., Об одной задаче оптимального уравнения дискретными системами Россера, Известия НАН Азерб. 2014, Vol.34, №3, с.105-113.
17. Кадырова С.Ш., Мансимов К.Б., Об одном представлении решения линейных разностных уравнений типа Россера, Известия НАН Азерб. 2013, Vol.33, №3, с.12-17.
18. Мирзаджанзаде А.Х., Ахметов И.М., Хасаев А.М., Гусев В.И. Технология и техника добычи нефти: Под редакцией акад. А.Х.Мирзаджанзаде. М., «Недра», 1986, 382 с.
19. Самарскии А.А.. Теория разностных схем. Москва. 1976 г.
20. Шуров В.И. Технология и техника добычи нефти М., «Недра», 1983, 510с.

Neft hasilatinda qazlift prosesi üçün Rosser modelinin qurulmasi alqoritimi

N.Ə. Əliyev, Fikrət Ə. Əliyev, M.M. Mütəllimov, R.M. Tağıyev

XÜLASƏ

Halqavari fəzada və qaldırıcıda neft istehsalının qazlift prosesinə uyğun qaz və maye qaz qarışığının hərəkətini təsvir edən birinci tərtib ikiölçülü hiperbolik tənliklər sistemi üçün sərhəd məsələsinə baxılmışdır. Fərz olunur ki, halqavari fəzanın sonundan qaldırıcının başlanğıcına qədər hərəkət uyğun impuls sisteminin köməyi ilə təsvir edilir. Ümumi hərəkət diferensial və ya fərq tənliklər sistemi ilə təsvir olunur, onu fərq tənliklər sistemi ilə yazmaq tövsiyyə olunur. Ona görə də müntəzəm fərq sxemindən istifadə edərək, Rosser modelini qurarkən, göstərilir ki, sistemə daxil olan həyacanlanma uyğun xətti cəbri tənliklər sistemindən təyin olunur. Göstərilir ki, Rosser modelinə daxil olan sabit sərhəd verilənləri halında həyacanlanma iştirak etmir. Verilən hal üçün həllin analitik təsviri alınmış, göstərilmişdir ki, bölgələrin uzunluğu sıfra yaxınlaşdıqda alınan nəticələr kəsilməz haldakı nəticələrlə üst-üstə düşür.

Açar sözlər: hiperbolik tənliklər, müntəzəm şəbəkə, qaz-lift, fərq tənlikləri, Rosser modeli, cəbri tənliklər sistemi.

An algorithm for constructing models of Roesser for gas lift process in oil production

N.A. Aliev, Fikret A. Aliev, M.M. Mutallimov, R.M. Tagiev

ABSTRACT

We consider boundary value problems for the two-dimensional system of first order hyperbolic equations, which describes the motion of the gas and liquid mixture (GLM) in the annular space and lift, respectively, in the process of gas-lift oil production. It is assumed that from the end of the annulus to the beginning of the lift the movement is performed by means of appropriate impulse systems, describes the formation of GLM. As the general motion is described by the system of differential and difference equations, advisable to describe it by the system of difference equations. Therefore, using the uniform grid the model of Roesser is constructed, where it is shown that the perturbation, included to the discrete system is determined from the corresponding systems of the linear algebraic equations. It is shown that in the case of constant boundary data the perturbation included in the model of Rosser, absent ie they are zero. For this case, the analytical representation of the solution are obtained, where at tends to zero of the steps of discretization, the obtained results are the same with the analogous results available in the continuous case.

Keywords: hyperbolic equation, uniform grid, gas lift, difference equations, model of Roesser, systems of algebraic equations.